מתמטיקה בדידה

ספר(לא חובה)

* מתמטיקה בדידה/נתי לניאל ומיכל פרנס
* תורת הקבוצות

תורת הקבוצות

קבוצה היא אוסף של איברים. מסמנים על סוגריים מסולסלים ובתוכם איברים, לדוגמה

A={1,כלב,שעון}

כדי לסמן אם איבר שייך או לא שייך לקבוצה משתמשים באפסילון:

קבוצת הטבעיים

קבוצת הטבעיים

קבוצת הרציונלים

# פרדוקס ראסל

בעיירה יש ספר שמספר את כל מי שלא מספר את עצמו. אם הספר לא מספר את עצמו אז הוא צריך לספר את עצמו, מה שאומר שהוא לא מספר את עצמו.

בצורה מתמטית:

שאלה: האם ?

קבוצות חשובות

קבוצה ריקה:

קבוצה אוניברסלית: u

הקבוצה האוניברסלית איננה קבוצת כל הקבוצות

# קבוצות שוות – הגדרה

תהיינה A,B קבוצות. נאמר שA וB שוות ונסמן כאשר אם אז וגם אם אז

במתמטית:

דוגמה:

# הגדרה

תהיינה A,B קבוצות. נאמר שA מוכלת או שווה לB(או A תת קבוצה של B) ונסמן אם לכל xεA מתקיים xεB

מסקנה:

נאמר שA מוכלת ממש בB (או A תת קבוצה אמיתית של B) אם אבל

הסכם

אם יש לנו משפט מהצורה "אם...אז..." ואנחנו רוצים לבדוק אם הוא אמיתי, אם הריישה(החלק הראשון של המשפט) של המשפט שקר אז כל המשפט הוא אמת.

# טענה

תהי A קבוצה, אזי

הסבר

אם אז

הריישה שקרית, לכן כל המשפט הוא אמת

דרך נוספת להוכיח: נניח לכן קיים כך ש וזו סתירה

פעולות על קבוצות

תהיינה A,B קבוצות

1. איחוד כל האיברים שנמצאים בלפחות אחת מהקבוצו
2. איחוד כל האיברים שנמצאים בלפחות אחת מהקבוצות
3. משלים
4. הפרש

דוגמאות:

# טענה(חצי מנוסחת דה מורגן)

תהיינה

## הוכחה פורמלית

(דיאגרמת וון היא לא שיטה להוכחה)

נוכיח

נניח

לפי הגדרת המשלים

זה אומר ש => =>

אותו דבר עושים לכיוון השני

יהי

תכונות הכלה

1. רפלקסיביות:
2. אנטיסימטריות: אם וגם אזי
3. טרנזיטיביות: אם וגם אזי
   * הוכחה:יהי => =>

טבלת אמת

xεA נסמן 1

xεA נסמן 0

|  |  |
| --- | --- |
|  | A |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B |  |  | A\B |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

נוכיח את השוויון

טענה: תהיינה A,B,C קבוצות – חוק הפילוג

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

כללים

תהיינה A,B,C קבוצות

1. חילוף:
2. אסוציאטיביות:
3. ניטראליות:
4. בליעה:
5. דה מורגן:
6. פילוג:
7. משלים:
8. אידמבוטנטיות:

תרגיל

תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו

פתרון:

לפי דה מורגן:

עוצמה

אם A קבוצה נסמן |A|=מספר האיברים של A. |A| נקרא העוצמה של A

דוגמאות

דוגמאות

|  |  |
| --- | --- |
| *טענה* |  |
|  | *לא* |
|  | *כן* |
|  | *כן* |
|  | *כן* |
|  | *כן* |
|  | *לא* |
|  | *לא* |
|  | *כן* |
|  | *כן* |
|  | *כן* |
|  | *כן* |
|  | *כן* |
|  | *לא* |
|  | *כן* |
|  | *לא* |
|  | *כן* |

תרגיל

תהינה A,B קבוצות. הוכיחו ⬄ לכל קבוצה C מתקיים

הוכחה: נתון A=B, תהי C קבוצה: צ"ל

יהי => xεA או xεC => xεB או xεC =>

יהי => xεB או xεC => xεA או xεC =>

# כיוון שני

נתון לכל קבוצה C מתקיים צ"ל

הוכחה: בפרט עבור מתקיים =>

סימונים

תהיינה A1,A2,…\_An קבוצות

נסמן

אותו דבר עבור חיתוך

תהי u קבוצה אוניברסלית

תהי קבוצת אינדקסים ותהי

(לכל )

נעשה איחוד לכל הAi:

לכל iεI מתקיים

# תרגיל

עבור הדוגמה נתון

חשבו

# תרגיל

לכל

חשבו: